

EXERCICE 1

1°/ Calculer $h'(x)$:

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x}{2x + 1}$$

2°/ Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-4}{(x^3-8)^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-1}{x-4x^2+x^3}$

3°/ Montrer que l'équation : (E) : $2x^4 - 3x^3 + x^2 - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $]1; 2[$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$

1°/ Vérifier que : $(\forall x \in I) f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$

2°/ Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3°/ Déterminer : $J = f(I)$

4°/ Mq f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J puis déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

EXERCICE 3

Soit la fonction h définie par son tableau de variation :

1°/ Calculer $h(-1)$; $h(2)$

2°/ Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h$

3°/ Déterminer $h([-1; 5])$
 $h([-1; +\infty[)$ et $h(\mathbb{R})$

4°/ Dresser le tableau de signe de h sur $[-1; 5]$

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
h	$-\infty$	1	0	-1	0

Correction du modèle n°1

EX.1

1°) $h(x) = \frac{x^3 - 4x}{2x+1}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

donc: $h'(x) = \frac{(x^3 - 4x)'(2x+1) - (x^3 - 4x) \times (2x+1)'}{(2x+1)^2}$

$$= \frac{(3x^2 - 4)(2x+1) - (x^3 - 4x) \times 2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{6x^3 + 3x^2 - 8x - 4 - (2x^3 - 8x)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{6x^3 + 3x^2 - 8x - 4 - 2x^3 + 8x}{(2x+1)^2} = \frac{4x^3 + 3x^2 - 4}{(2x+1)^2}$$

2°/a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-4}{(x^3-8)^2} = \frac{6-4}{(8-8)^2} = \frac{2}{0^+} = \boxed{+\infty}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-1}{x-4x^2+x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = \frac{5}{+\infty} = \boxed{0}$

3°/ soit: $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 1$

f est continue sur \mathbb{R} (polynôme)

donc: f est continue sur $[1; 2]$

$$f(1) = 2 - 3 + 1 - 1 = -1 < 0$$

$$f(2) = 2 \times 16 - 3 \times 8 + 4 - 1 = 32 - 24 + 3 = 11 > 0$$

$f(1) \times f(2) < 0$; donc d'après T.V.I l'éq

(E) admet au moins une solution dans $]1; 2[$

EX.2

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

$$I = [0, +\infty[$$

$$1^\circ (\forall x \in I) \quad f'(x) = \frac{(x-3)'(x+2) - (x-3)(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{1 \times (x+2) - (x-3) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2 - x+3}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \boxed{1}$$

3° $f'(x) > 0$ donc f est \nearrow sur I donc :

$$J = f(I) = f([0, +\infty[) = [f(0); \lim_{+\infty} f] = \left[\frac{0-3}{0+2}; 1\right] = \left[-\frac{3}{2}; 1\right]$$

4° f continue et strictement croissante sur I , donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J .

Soient $x \in J$ et $y \in I$ on a : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-3}{y+2} \Leftrightarrow x(y+2) = y-3$$

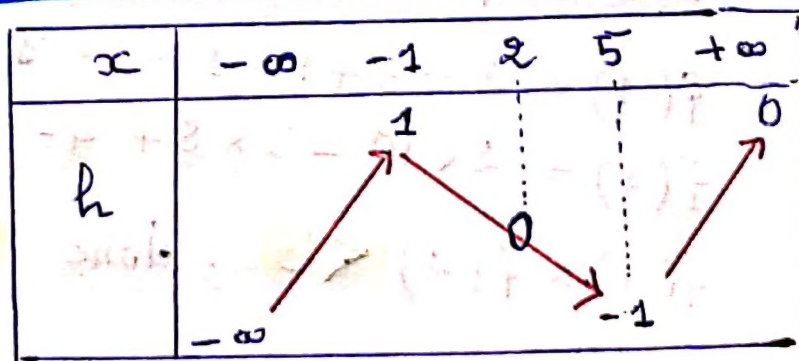
$$\Leftrightarrow xy + 2x = y - 3 \Leftrightarrow xy - y = -2x - 3$$

$$\Leftrightarrow -xy + y = 2x + 3 \Leftrightarrow y(-x+1) = 2x+3$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x+3}{-x+1} \quad \text{donc : } \left\{ (\forall x \in J); f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{-x+1} \right\}$$

EX.3

pour répondre
à la question : on utilise
le tableau \rightarrow



$$1^\circ h(-1) = 1$$

$$h(2) = 0$$

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

3°/ h est \searrow sur $[-1; 5]$ donc :

$$h([-1; 5]) = [h(5); h(-1)] = [-1; 1]$$

$$h(]-1; +\infty[) = [-1; 1[$$

$$h(\mathbb{R}) = h(]-\infty; +\infty[) =]-\infty; 1]$$

4°/ Tableau de signe sur l'intervalle $[-1; 5]$

on a :

x	-1	2	5
h	1	0	-1

positive

des images
négatives

donc le tableau de signe :

x	-1	2	5
h	+	0	-

— * fin du devoir * —